UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
MATEMÁTICAS I (MA-1111)

Elaborado por
Miguel Labrador
12-10423
Ing. Electrónica

Respuestas PRIMER PARCIAL HORARIO 3-4.

Pregunta 1. (6 puntos)Determine todos los valores de x que satisfacen la siguiente desigualdad

$$\left|2 - \frac{1}{5x-1}\right| \geq 1$$

.

RESPUESTA:

Utilizamos las **propiedades de las desigualdades con valor absoluto**, en este caso, que:

Si $a \in \mathbb{R}$

$$|x| \geq a \Longleftrightarrow x \leq -a \quad \text{ó} \quad x \geq a$$

Usamos la propiedad y obtenemos:

$$\left|2 - \frac{1}{5x-1}\right| \geq 1 \Longleftrightarrow 2 - \frac{1}{5x-1} \leq -1 \text{ ó } 2 - \frac{1}{5x-1} \geq 1$$

Resolvemos las desigualdades:

$$\Longleftrightarrow 2 - \frac{1}{5x-1} \leq -1 \quad \text{ó} \quad 2 - \frac{1}{5x-1} \geq 1$$

$$\Longleftrightarrow \frac{10x-2-1}{5x-1} \leq -1 \quad \text{ó} \quad \frac{10x-2-1}{5x-1} \geq 1$$

$$\Longleftrightarrow \frac{10x-3}{5x-1} \leq -1 \quad \text{ó} \quad \frac{10x-3}{5x-1} \geq 1$$

$$\Longleftrightarrow \frac{10x-3}{5x-1} + 1 \leq 0 \quad \text{ó} \quad \frac{10x-3}{5x-1} - 1 \geq 0$$

$$\Longleftrightarrow \frac{15x-4}{5x-1} \leq 0 \quad \text{ó} \quad \frac{5x-2}{5x-1} \geq 0$$

Debemos estudiar los signos de cada desigualdad

Para $\dfrac{15x-4}{5x-1} \leq 0$ los puntos de interés son $x = \frac{4}{15}$ $x = \frac{1}{5}$

	$(-\infty, \frac{1}{5})$	$(\frac{1}{5}, \frac{4}{15}]$	$[\frac{4}{15}, +\infty)$
$15x-4$	-	-	$+$
$5x-1$	-	$+$	$+$
$\frac{15x-4}{5x-1}$	$+$	-	$+$

No incluimos en los intervalos a $x = \frac{1}{5}$ ya que allí no está definida la función (división entre 0) y SI incluimos a $x = \frac{4}{15}$ porque la desigualdad NO es estricta.

De aquí obtenemos el conjunto que cumple con la primera condición:

$$S_a = (\frac{1}{5}, \frac{4}{15}]$$

Para $\dfrac{5x-2}{5x-1} \geq 0$ los puntos de interés son $x = \frac{2}{5}$ $x = \frac{1}{5}$

	$(-\infty, \frac{1}{5})$	$(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}]$	$[\frac{2}{5}, +\infty)$
$5x-2$	-	-	$+$
$5x-1$	-	$+$	$+$
$\frac{5x-2}{5x-1}$	$+$	-	$+$

De aquí obtenemos el conjunto que cumple con la segunda condición:

$$S_b = (-\infty, \frac{1}{5}) \cup [\frac{2}{5}, +\infty)$$

Finalmente **la respuesta será la unión de los conjuntos que obtuvimos**, osea:

$$S_g = S_a \cup S_b$$
$$S_g = \{(-\infty, \frac{1}{5}) \cup [\frac{2}{5}, +\infty)\} \cup (\frac{1}{5}, \frac{4}{15}]$$

Pregunta 2. (6 puntos) Encuentre la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(2, -1)$, $B(3, 4)$ y cuyo centro está sobre la recta $x + y = 2$.

RESPUESTA:

Este problema se puede resolver de manera más analítica planteando un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas, sin embargo vamos a resolverlo con las herramientas geométricas que conocemos.

Hecho importante:

Sea L' una que pasa sobre dos puntos A y B pertenecientes a una circunferencia, sea L una recta perpendicular a L' y que pasa por el punto medio entre A y B, entonces L' también pasa por el centro de la circunferencia.

Veamos pues que el problema nos pide una circunferencia cuyo centro está sobre la recta $L \equiv x + y = 2$ de modo que si logramos encontrar otra recta que llamaremos L_1 y que pase por el centro podremos **intersecar** ambas rectas y obtener el punto que corresponderá al centro de la circunferencia.

Para hallar L_1:

Usamos el **Hecho importante** y buscamos el punto medio entre A y B:

$$P_m\left(\frac{2+3}{2}, \frac{-1+4}{2}\right) = P_m\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

Ahora necesitamos la pendiente de L_1, m_1. Como L_1 debe ser perpendicular a la recta que pasa por A y B para que se cumpla **Hecho importante**, sus pendientes cumplen que:

$$m_{AB}.m_1 = -1 \tag{1}$$

Además

$$m_{AB} = \frac{-1-4}{2-3} = \frac{-5}{-1} = 5$$

Sustituimos $m_{AB} = 5$ en (1) y tenemos que:

$$5.m_1 = -1$$
$$\Rightarrow m_1 = -\frac{1}{5}$$

Ahora construimos la recta con la ecuación punto pendiente y la llevamos, **por conveniencia**, a la forma general de la ecuación de la recta.

$$y - y_0 = m_1(x - x_0) \qquad \text{(Ecuación Punto-Pendiente)}$$

Con $(x_0, y_0) = P_m\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$

Entonces:

$$\begin{aligned} y - \frac{3}{2} &= -\frac{1}{5}(x - \frac{5}{2}) \\ y &= -\frac{x}{5} + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \\ y &= -\frac{x}{5} + 2 \\ 5y &= -x + 10 && \text{(Multiplicamos a ambos lados por 5)} \\ x + 5y &= 10 \end{aligned}$$

Ya hemos conseguido $L_1 \equiv x + 5y = 10$, para obtener el centro solo debemos intesecar L y L_1. Construimos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y = 2 & (1) \\ x + 5y = 10 & (2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x - y = -2 \\ x + 5y = 10 \end{cases}$$

$$4y = 8$$
$$y = 2$$

Sustituimos $y = 2$ en (1) o en (2) para obtener el valor de x.

$$x + y = 2 \Longrightarrow x + (2) = 2 \Longrightarrow x = 0$$

De aquí, el punto de intersección, es decir, **el centro de la circunferencia** está dado por el punto C(0,2).

Ahora el radio es sencillamente la distancia entre el centro y cualquiera de los puntos sobre la circunferencia, por lo tanto el radio r se puede calcular como la distancia entre C y A.

$$r = \sqrt{(0-2)^2 + (2-(-1))^2}$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{13}$$

Finalmente la respuesta a la pregunta es la ecuación de la circunferencia:

$$(x-0)^2 + (y-2)^2 = (\sqrt{13})^2$$

$$\boxed{x^2 + (y-2)^2 = 13}$$

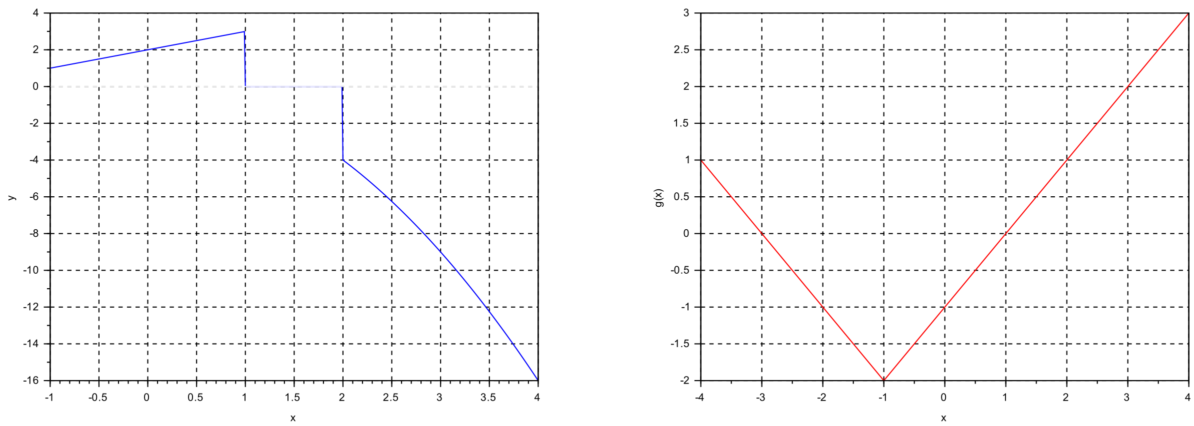
Pregunta 3. (6 puntos) Dadas las funciones

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{si } x \geq 2 \\ x + 2, & \text{si } x \ < 1 \end{cases} \qquad y \qquad g(x) = \mid x + 1 \mid -2,$$

1. Haga un bosquejo de las gráficas de ambas funciones.
2. Halle $f \circ g$ y su dominio.

RESPUESTA:

Parte a:



(a) Función f(x)

(b) Función g(x)

Del bosquejo e la parte a podemos ver que Domf= $(-\infty, 1) \cup [2, +\infty)$ y Domg= $\mathbb{R}$. [*].

Como f no está definida para todos los reales es posible que la composición tampoco lo esté (lo dicho en prepa.) Luego:

Para hallar $f \circ g = f(g(x))$:

$$
\begin{aligned}
f(g(x)) &= \begin{cases} -g(x)^2, & \text{si } g(x) \geq 2 \text{ y } x \in \Re \\ g(x)+2, & \text{si } g(x) < 1 \text{ y } x \in \Re \end{cases} \\
&= \begin{cases} -(\mid x+1 \mid -2)^2, & \text{si } \mid x+1 \mid -2 \geq 2 \text{ y } x \in \Re \\ \mid x+1 \mid -2+2, & \text{si } \mid x+1 \mid -2 < 1 \text{ y } x \in \Re \end{cases} \\
&= \begin{cases} -(\mid x+1 \mid -2)^2, & \text{si } \mid x+1 \mid \geq 4 \text{ y } x \in \Re \\ \mid x+1 \mid, & \text{si } \mid x+1 \mid < 3 \text{ y } x \in \Re \end{cases}
\end{aligned}
$$

Ahora calculamos como quedan los «trozos» donde está definida la composición:

I. $\mid x+1 \mid \geq 4$ y $x \in \mathbb{R} \iff (x \geq 3$ o $x \leq -5)$ y $x \in \mathbb{R} \iff x \geq 3$ o $x \leq -5$

II. $\mid x+1 \mid < 3$ y $x \in \mathbb{R} \iff -4 < x < 2$ y $x \in \mathbb{R} \iff -4 < x < 2$

[*]Esto no forma parte de la respuesta, solamente es algo de lo que uno se debería percatar antes de hacer la composición. Por otra parte para saber el dom de las funciones no es necesario observar el bosquejo, solamente se aprovechó esta herramienta porque ya estaba ahí.

Recordemos que cualquier conjunto intersecado con los reales resulta en el mismo conjunto.

Ahora con los «trozos definidos» expresamos la forma final de la función compuesta $f \circ g$

$$f(g(x)) = \begin{cases} -(\mid x+1 \mid -2)^2, & \text{si } x \leq -5 \text{ o } x \geq 3 \\ \mid x+1 \mid, & \text{si } -4 < x < 2 \end{cases}$$

Finalmente $\mathrm{Dom}(f \circ g) = (-\infty, -5] \cup (-4, 2) \cup [3, +\infty)$

Pregunta 4. (6 puntos.) Determine el dominio de la función

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3 + x - 2}{x^2 - 7x + 12}}$$

RESPUESTA:

Como tenemos una raíz sabemos que lo que esté dentro de ella **NO** debe ser negativo, por lo tanto tenemos que buscar lo valores de x que satisfacen:

$$\frac{x^3 + x - 2}{x^2 - 7x + 12} \geq 0$$

Por lo que el problema de hallar el dominio de f se convierte en buscar las soluciones de la inecuación planteada.

Buscamos los puntos de interés que son las raíces del numerador y del denominador (esto se hace con la técnicas de factorización que debe conocer por ejemplo: Ruffini y tanteo, etc).

$$\begin{aligned} & \frac{x^3 + x - 2}{x^2 - 7x + 12} \geq 0 \\ \iff & \frac{(x-1)(x^2 + x + 2)}{(x-4)(x-3)} \geq 0 \end{aligned}$$

El polinomio $x^2 + x + 2$ corresponde a una parábola positiva $\forall x \in \Re$ y se puede demostrar calculando el **discriminante**:

$$b^2 - 4ac = (1)^2 - 4(1)(2) = -7 < 0$$

Como este factor no tiene raíces reales y es siempre positivo se puede pasar dividiendo a la derecha **sin alterar la desigualdad**.

Luego:

$$\begin{aligned} \iff & \frac{(x-1)(x^2 + x + 2)}{(x-4)(x-3)} \geq 0 \\ \iff & \frac{(x-1)}{(x-4)(x-3)} \geq 0 \end{aligned}$$

Analizamos los signos de la desigualdad.

Puntos de interés $x=1$ $x=3$ $x=4$

	$(-\infty,1]$	$[1,3)$	$(3,4)$	$(4,+\infty)$
$x-1$	-	$+$	$+$	$+$
$x-4$	-	-	-	$+$
$x-3$	$+$	-	$+$	$+$
$\dfrac{(x-1)}{(x-4)(x-3)}$	-	$+$	-	$+$

Note que no se incluye el 3 ni el 4 en los intervalos de prueba porque en esos valores de x la función NO ESTÁ DEFINIDA.

Luego dominio son los intervalos donde la expresión es positiva o cero.

Finalmente:

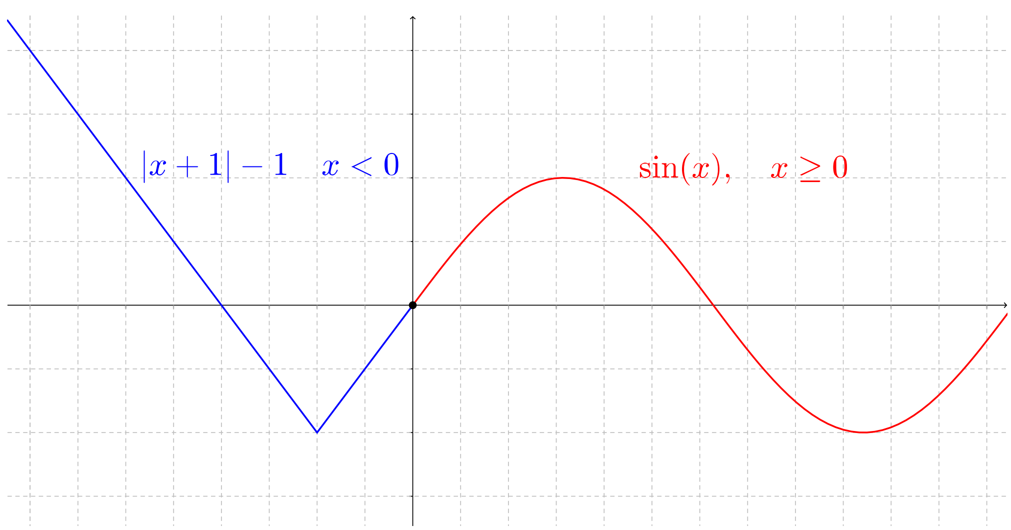
$$\boxed{\text{Domf} = [1,3)\cup(4,+\infty)}$$

Pregunta 5. (6 puntos.) Sea $f(x)=\begin{cases} \mid x+1\mid -1, & \text{si } x<0 \\ \sin(x), & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$

1. Bosqueje la gráfica de f.
2. Determine el dominio y el rango de f.
3. Determine cuál es el intervalo más grande que contenga a 1 sobre el cual f es inyectiva.

RESPUESTA:

Parte a:



Parte b: Observando los trozos donde está definida f es evidente que

$$Domf = (-\infty, 0) \cup [0, +\infty) = \mathbb{R}$$

Por el bosquejo, la función nunca baja de $y = -1$ y sube hasta el infinito, de modo que el rango f está dado por

$$Ranf = [-1, \infty)$$

Parte c: Acá se pide encontrar un intervalo de f que contenga al valor $x = 1$ donde ella sea inyectiva. Como tenemos el bosquejo no es necesario recordar la definición de inyectividad, ni hacer las demostraciones. Usaremos el criterio de la línea horizontal.

Si pasamos una línea horizontal por la gráfica de la función y esta solo corta a la función en un solo punto en todo el recorrido, entonces estamos en presencia de la gráfica de una función inyectiva.

Con esta justificación podemos pasar la línea imaginaria por la gráfica y ver que un intervalo en donde se cumple que la linea horizontal corta una sola vez a f y que además tiene al 1 es: $(-1, \frac{\pi}{2})$.

Note que otro intervalo donde esto ocurre puede ser el $(0, 1]$ pero el problema nos dice que debe ser el **MAYOR** intervalo por lo tanto la solución válida es:

$$\boxed{(-1, \frac{\pi}{2})}$$

Se agradece notificar cualquier error de tipeo o en las respuestas y qué debería decir a la dirección miguelangel2801@gmail.com

Miguel Labrador
Carnet: 12-10423
Ingeniería Electrónica
Twitter: @MiguelAngel2801